



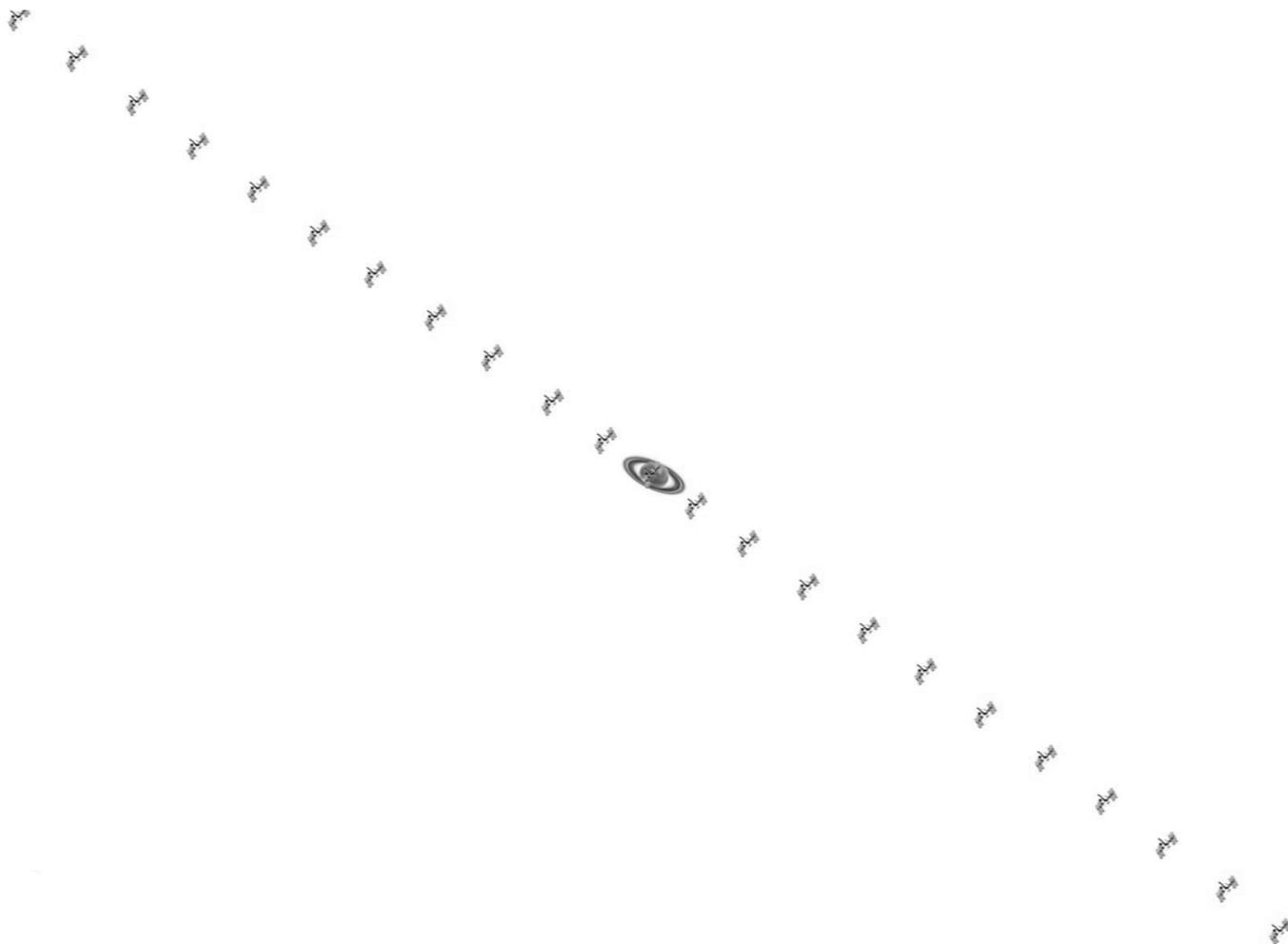
XXIII Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
практический тур, решения

2016
13
марта

9 класс

Перед вами негативы фотографий прохождения МКС по диску Сатурна, сделанных 15 января 2016 года. Оцените продолжительность прохождения МКС по диску Сатурна вместе с кольцами и время между съемкой первого и последнего кадра. Какова ширина полосы на поверхности Земли, в которой должен был находиться фотограф, чтобы сделать такой снимок?

Известно, что элонгация Сатурна в этот день составляла 42° , а высота орбиты МКС равна $4 \cdot 10^2$ км. Считать, что Сатурн находился для фотографа в зените, вращением Земли вокруг своей оси пренебречь.



Решение:

Найдем угловой размер Сатурна в момент съемки. Как известно, радиус Сатурна R составляет порядка $6 \cdot 10^4$ км, а его полный линейный размер вместе с кольцами примерно в 4 раза больше (это можно оценить по фотографии). Тогда угловой размер Сатурна ρ составит

$$\rho = \frac{4R}{d},$$

где d — расстояние от Земли до Сатурна, угол ρ выражен в радианах и учтено, что $\rho \ll 1$.

Расстояние d можно найти, воспользовавшись теоремой косинусов:

$$a_{\oplus}^2 + d^2 - 2a_{\oplus}d \cos \alpha = a^2,$$

где a_{\oplus} и a — радиусы орбит Земли и Сатурна соответственно, $\alpha = 42^\circ$ — элонгация Сатурна.

Теперь нужно решить это квадратное уравнение относительно d . В условиях отсутствия доступа к справочным данным и калькулятору первым делом захочется впасть в уныние, но вместо этого лучше остановиться и подумать. С учетом точности, с которой приведены данные о высоте орбиты МКС в условии задачи, и точности, с которой мы оценили линейные размеры Сатурна, достаточно найти расстояние до Сатурна с точностью до одной значащей цифры. Радиус орбиты Сатурна почти на порядок больше радиуса орбиты Земли и составляет чуть меньше 10 а.е. Точное значение угла α в такой ситуации совершенно излишне — мы и так можем сказать, что расстояние d должно быть несколько меньше суммы радиусов орбит Земли и Сатурна $a_{\oplus} + a$, т.е. чуть больше 10 а.е. Таким образом, $d \approx 1 \cdot 10^1$ а.е. Желающие могут убедиться в справедливости оценки, честно решив вышеуказанное квадратное уравнение с точным значением полуоси орбиты Сатурна — при допущении, что орбита Сатурна является круговой, «честное» значение расстояния d получится равным 10.3 а.е. Заметим, что на самом деле орбита Сатурна имеет заметный эксцентриситет (0.056), поэтому реальное расстояние от Земли до Сатурна 15 января 2016 года составляло 10.7 а.е. Но на итоговый ответ это никак не влияет — наша оценка линейного размера колец в действительности немного занижена, так что эти неточности компенсируют друг друга.)

Таким образом, получаем угловой размер Сатурна с кольцами:

$$\rho = \frac{4 \cdot (6 \cdot 10^4)}{(1 \cdot 10^1) \cdot (1.5 \cdot 10^8)} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Отметим, что переводить радианы в угловые секунды или какие-нибудь другие величины для дальнейшего решения задачи не требуется.

Теперь нужно найти ω — угловую скорость МКС. Предполагая орбиту круговой, найдем линейную скорость станции V :

$$V = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}}.$$

Здесь G — гравитационная постоянная, M_{\oplus} и R_{\oplus} — масса и радиус Земли соответственно, h — высота орбиты МКС. Тот, кто помнит величину первой космической скорости для поверхности Земли (≈ 8 км/с), может опять ничего не считать — высота орбиты МКС существенно меньше радиуса Земли, поэтому скорость станции с требуемой точностью не будет отличаться от указанного выше значения.

Тут следует обратить внимание, что нам нужно найти видимую угловую скорость МКС при ее прохождении через зенит для наблюдателя, находящегося на поверхности Земли. Как мы уже выяснили, высота орбиты МКС мала по сравнению с радиусом Земли, поэтому искомая скорость будет существенно больше геоцентрической угловой скорости движения станции по орбите:

$$\omega = \frac{V}{h} = \frac{8}{4 \cdot 10^2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ рад/с}$$

Теперь можно найти время транзита τ :

$$\tau = \frac{\rho}{\omega} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ рад/с}} = 10^{-2} \text{ секунд.}$$

Что касается продолжительности съемки, то можно заметить, что расстояние между соседними положениями МКС практически равно угловому размеру Сатурна. Всего на фотографии 22 таких промежутка, поэтому общая продолжительность съемки составила $22 \cdot 10^{-2} \approx \frac{1}{5} \div \frac{1}{4}$ секунды.

Теперь оценим ширину полосы l , в которой МКС проецируется на диск Сатурна. Очевидно, что параллакс Сатурна значительно меньше его угловых размеров, поэтому им можно пренебречь. Поэтому ширина полосы определяется только углом $\rho/2$ (здесь мы учли, что траектория МКС прошла практически вдоль большой полуоси проекции колец на картинную плоскость, и допустимое положение станции определяется угловым диаметром самой планеты). Учитывая малость углов, получаем:

$$l = h \cdot \frac{\rho}{2} = 400 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-4}}{2} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ км} = 40 \text{ м.}$$

Как видно, сделать такой снимок было не очень просто. ☺

Примечание. Конечно, утверждение о том, что Сатурн в момент съемки находился для наблюдателя в зените, является упрощением, не совпадающим с действительностью — в такой ситуации зенитное расстояние Солнца равно элонгации Сатурна, т.е. Солнце находится на высоте $90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$ над горизонтом и сфотографировать ни Сатурн, ни МКС не представляется возможным. На самом деле Сатурн был на небольшой высоте над горизонтом. Впрочем, существенного влияния на ответ это не оказывает.

М.И.Волобуева